

$$d) \int \frac{x \, dx}{1+x^3} =$$

Claramente podemos ver que $1+x^3$ tiene a $x=-1$ por raíz. Factorizando el denominador nos queda $(x+1)(x^2-x+1)$, donde el segundo factor no tiene raíces reales, por lo que la función integrando quedaría descompuesta como:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Demos valores a x para encontrar A, B y C :

$$\begin{aligned} \text{si } x=-1 &\Rightarrow -1 = A(1^2 - (-1) + 1) \\ -1 &= A(1+1+1) \rightarrow \boxed{A = -1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } x=0 &\Rightarrow 0 = A(0^2 - 0 + 1) + (B \cdot 0 + C)(0+1) \\ 0 &= A + C \\ 0 &= -1/3 + C \rightarrow \boxed{C = 1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } x=1 &\Rightarrow 1 = -1/3(1^2 - 1 + 1) + (B \cdot 1 + 1/3)(1+1) \\ 1 &= -1/3 + 2B + 2/3 \\ 4/3 - 2/3 &= 2B \rightarrow \boxed{B = 1/3} \end{aligned}$$

La integral nos quedaría:

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{1/3 x + 1/3}{x^2 - x + 1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx =$$

integral de una
expresión racional
CASO 2)

no tiene raíces reales.

Aún no sabemos resolver este tipo de integral, para ello, veamos en el siguiente ejercicio cómo se integran las integrales de la forma:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \text{ donde: } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ } a \neq 0.$$

Estas se basan en las siguientes primitivas inmediatas:

$$i.) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

$$ii.) \int \frac{dx}{1-x^2} = \text{ArgTh } x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

EJERCICIO 5: Integrales de la forma: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ con $m, n \in \mathbb{R}, n \neq 0$
 $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

a) $\int \frac{dx}{2-8x^2} =$

Donde: $m=0, n=1, a=-8, b=0 \wedge c=2$.

La clave para resolver esta integral es llevarla a alguna de la forma i) ó ii) anteriormente citada.

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Sacando factor común}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-(2x)^2} \stackrel{\text{sustitución: } t=2x}{=} \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1-t^2} \stackrel{\text{por ii)}}{=} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + C = \\ & = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+2x}{1-2x} \right| + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10} =$

En este caso, como tenemos un trinomio en el denominador, lo primero que debemos hacer es completar cuadrados:

$$x^2 + 2x + 1 + 10 - 1 = (x+1)^2 + 9$$

$$\begin{aligned} & = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{9} + 1} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \stackrel{\text{sust: } t = \frac{x+1}{3}}{=} \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3} dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} = \\ & \text{para que se parezca a i) extraemos el 9.} \end{aligned}$$

$$dt = \frac{1}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \stackrel{\text{por i)}}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C$$

c) $\int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx =$

Donde: $m=1, n=1$

Y llegamos por fin a la integral del tipo que no pudimos resolver en el EJERCICIO 4. d), de hecho, es una parte de ella.

Para x^2-x+1 completemos cuadrados: $x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ Reservemos

este resultado un momento.

Lo que haremos ahora es lo que debemos hacer cada vez que $m \neq 0$.

Derivemos el denominador de la función integrando:

$D(x^2 - x + 1) = 2x - 1$ como procuramos hacer una sustitución con $t = x^2 - x + 1$ y $dt = 2x - 1$, "arreglaremos" el numerador $x + 1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x + \textcircled{2} = 3-1}{x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{3 dx}{x^2-x+1} \textcircled{=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \\ \downarrow \text{multiplicando y} & \downarrow \text{sust: } t = x^2 - x + 1 \\ \downarrow \text{dividiendo por 2.} & \downarrow dt = (2x-1) dx \end{aligned}$$

usaremos resultado reservado.

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} + 1} =$$

integrando el 1º término

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + 2 \int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2 + 1} \textcircled{=} \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2 + 1} =$$

sust: $t = \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}$

$$dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \sqrt{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \textcircled{=} \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} t + C =$$

por i)

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left[\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}} \right] + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

listo !!!

Volvamos al EJERCICIO 4.d):

Nos quedamos en $-\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx =$

$$\textcircled{=} -\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \right) =$$

por lo resuelto recién

$$= -\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{C}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)^2} \right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C'$$

terminado !!!

EJERCICIO 6: Integrales de la forma: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $a \neq 0$

Estas se basan en las siguientes integrales inmediatas:

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$

ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Arg Sh } x + C = \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + C$

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg Ch } x + C = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C$

Empecemos:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}} =$

Para la resolución debemos lograr, como en el ejercicio anterior, que tengan cualquiera de las formas i), ii) ó iii).

El -1 nos sirve, al $4x^2$ lo escribiremos como $(2x)^2$ lo haremos
 y luego haremos la sustitución:

sust: $t = 2x$
 $dt = 2 dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{(2x)^2-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \stackrel{\text{per iii)}}{=} \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2-1}| + C =$

$= \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2-1}| + C = \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2-1}| + C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} =$

Completemos cuadrados: $-(x^2-4x+4-4+3) = -[(x-2)^2-1] = 1-(x-2)^2$

$\stackrel{\text{reemplazando}}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \stackrel{\text{sust. } t=x-2}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \stackrel{\text{por i)}}{=} \arcsen t + C = \arcsen (x-2) + C \checkmark$
 $dt = dx$

EJERCICIO 7: Integrales de la forma: $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$

Se basa en tres integrales: i) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$, utilizaremos sustitución: $x = a \cdot \text{sent}$

ii) $\int \sqrt{x^2+a^2} dx$, utilizaremos sustitución: $x = a \cdot \text{Sh } t$

iii) $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$, utilizaremos sustitución: $x = a \cdot \text{Ch } t$

Ahora hagamos unos ejercicios:

a) $\int \sqrt{8-4x-4x^2} dx$

Completamos cuadrados del radicando

$$8-4x-4x^2 = -4 \cdot (-2+x+x^2) = -4 \cdot (x^2+x+\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2) = -4 \cdot [(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}] = 4 \cdot [\frac{9}{4} - (x+\frac{1}{2})^2]$$

$$= \int \sqrt{4 \cdot [\frac{9}{4} - (x+\frac{1}{2})^2]} dx \stackrel{\text{forma i)}}{=} 2 \int \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - z^2} dz \stackrel{\text{forma i)}}{=} 2 \int \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \sin^2 t} \cdot \frac{3}{2} \cos t dt =$$

sust. 1°: $z = x + \frac{1}{2}$
 $dz = dx$

sust. 2°: $z = \frac{3}{2} \sin t$
 $dz = \frac{3}{2} \cos t dt$

$$= 3 \cdot \frac{3}{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \frac{9}{4} \int \cos^2 t dt = \frac{9}{4} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{4} (t + \frac{\sin 2t}{2}) + C =$$

$$= \frac{9}{4} (t + \frac{2 \sin t \cos t}{2}) + C \stackrel{\text{por sust. 2°}}{=} \frac{9}{4} (\arcsin \frac{2}{3} z + \frac{2}{3} z \cdot \frac{\sqrt{9-4z^2}}{3}) + C =$$

• per sust 2°: $\begin{cases} \sin t = \frac{2}{3} z \\ t = \arcsin \frac{2}{3} z \end{cases}$

• $\cos t = \sqrt{1 - \frac{4}{9} z^2} = \frac{\sqrt{9-4z^2}}{3}$

$$\stackrel{\text{por sust. 1°}}{=} \frac{9}{4} [\arcsin \frac{2}{3} (x + \frac{1}{2}) + \frac{2}{9} (x + \frac{1}{2}) \sqrt{9-4(x+\frac{1}{2})^2}] + C \quad \checkmark$$

b) $\int \sqrt{x^2-9} dx \stackrel{\text{forma iii)}}{=} \int \sqrt{9 \operatorname{Ch}^2 t - 9} \cdot 3 \cdot \operatorname{Sh} t dt = 9 \int \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1} \operatorname{Sh} t dt \stackrel{\text{forma iii)}}{=} 9 \int \sqrt{\operatorname{Sh}^2 t} \cdot \operatorname{Sh} t dt$

sust. $x = 3 \operatorname{Ch} t \rightarrow \operatorname{Ch} t = \frac{x}{3}$
 $dx = 3 \operatorname{Sh} t dt$

$\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t = 1$
 $\operatorname{Ch}^2 t - 1 = \operatorname{Sh}^2 t$

$$= 9 \int \operatorname{Sh}^2 t dt \stackrel{\text{Sh}^2 t = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch} 2t - 1)}{=} 9 \int \frac{1}{2} (\operatorname{Ch} 2t - 1) dt = \frac{9}{2} (\frac{\operatorname{Sh} 2t}{2} - t) + C = \frac{9}{2} (\frac{2 \operatorname{Ch} t \operatorname{Sh} t}{2} - t) + C \stackrel{\text{Sh} t = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1}}{=} \frac{9}{2} (\frac{x}{3} \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} - t) + C$$

$$\stackrel{\text{trabajando el argumento del ln}}{=} \frac{9}{2} (\frac{x}{3} \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} - \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{x}{3}) + C = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-9} - \ln | \frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} |) + C =$$

$x = 3 \operatorname{Ch} t$
 $t = \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{x}{3}$

$$\stackrel{\text{trabajando el argumento del ln}}{=} \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-9} - \ln |x + \sqrt{x^2-9}| - \ln 3) + C \stackrel{\text{trabajando el argumento del ln}}{=} \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-9} - \ln |x + \sqrt{x^2-9}|) + C_1$$

$C_1 = \frac{1}{2} \ln 3 + C$

c) $\int \sqrt{x^2 - 4x + 13} \, dx$

Completamos cuadrados para llevar el radicando a una de las tres formas dadas al comienzo y, luego, ver cual es la sustitución que debemos usar:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 13 = (x-2)^2 + 9$$

forma ii) $\int \sqrt{t^2 + 9} \, dt \equiv \int \sqrt{3^2 \cdot \text{Sh}^2 u + 9} \cdot 3 \cdot \text{Ch} u \, du = 9 \int \sqrt{\text{Sh}^2 u + 1} \, \text{Ch} u \, du \equiv$

sust 1: $t = x - 2$
 $dt = dx$

sust 2: $t = 3 \cdot \text{Sh} u \rightarrow \text{Sh} u = t/3$
 $dt = 3 \cdot \text{Ch} u \, du$

$u \downarrow \text{Arg Sh } \frac{t}{3}$

$\text{Ch}^2 u - \text{Sh}^2 u = 1$
 $\text{Ch} u = \sqrt{1 + \text{Sh}^2 u}$

$$= 9 \int \sqrt{\text{Ch}^2 u} \, \text{Ch} u \, du = 9 \int \text{Ch}^2 u \, du \equiv \frac{9}{2} \int (1 + \text{Ch} 2u) \, du = \frac{9}{2} \left(u + \frac{\text{Sh} 2u}{2} \right) + C \equiv$$

$\text{Ch}^2 u = \frac{1}{2}(1 + \text{Ch} 2u)$

$\text{Sh} 2u = 2 \text{Sh} u \cdot \text{Ch} u$
 $= 2 \cdot \frac{t}{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{9}}$

$$= \frac{9}{2} \left(\text{Arg Sh } \frac{t}{3} + \frac{2 \cdot \frac{t}{3} \cdot \frac{\sqrt{9+t^2}}{3}}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \left(9 \text{Arg Sh } \frac{t}{3} + t \cdot \sqrt{9+t^2} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left(9 \cdot \ln |t + \sqrt{t^2 + 9}| + t \cdot \sqrt{9+t^2} \right) + C = \frac{1}{2} \left[9 \cdot \ln |(x-2) + \sqrt{(x-2)^2 + 9}| + (x-2) \sqrt{(x-2)^2 + 9} \right] \checkmark$$

NOTA:

En la resolución del EJERCICIO 7 entonces lo primero que debemos hacer es bajar el radicando para llegar a una de las formas i), ii) o iii) para aplicar la sustitución adecuada. Luego, se utilizan identidades trigonométricas y también las dadas a continuación para las integrales de las formas ii) y iii):

$$* \text{Arg Sh } \frac{x}{a} = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right| = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| - \ln a$$

forma parte de C

$$* \text{Arg Ch } \frac{x}{a} = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a$$

EJERCICIO 8: Integrales de la forma: i) $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$

ii) $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$

iii) $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$, con $m \neq n$ y $m, n \in \mathbb{R}$

Las fórmulas que permiten resolver estas integrales son las que expresan estos productos en forma de suma:

1) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

2) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

3) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

Este tipo de integrales son bastante sencillas como veremos, por lo tanto resolveremos dos de los tres casos:

a) $\int \sin 3x \cdot \cos 4x \, dx$, tomaremos $\alpha = 3x$ y $\beta = 4x$

$\Rightarrow \frac{1}{2} [\sin(3x+4x) + \sin(3x-4x)] \, dx = \frac{1}{2} [\sin 7x + \sin(-x)] \, dx$ $\Rightarrow -\sin x = \sin(-x)$
 caso 1)
 $= \frac{1}{2} \int [\sin 7x - \sin x] \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \sin t \, dt - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx =$
 sust: $t = 7x$
 $dt = 7 \, dx$

$= -\frac{1}{14} \cos t + \frac{1}{2} \cos x + C = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + C \quad \checkmark$

b) $\int \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$

tomaremos: $\alpha = 2x$ y $\beta = 3x$

$\Rightarrow \frac{1}{2} [\cos(2x+3x) + \cos(2x-3x)] \, dx = \frac{1}{2} [\cos 5x + \cos(-x)] \, dx$ $\Rightarrow \cos(-x) = \cos x$
 caso 3)
 $= \frac{1}{2} \left[\int \frac{\cos t}{5} \, dt + \int \cos x \, dx \right] =$
 sust: $t = 5x$
 $dt = 5 \, dx$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin t}{5} + \sin x \right] + C = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 5x}{5} + \sin x \right) + C \quad \checkmark$